Chapitre 3 : Mouvement parabolique dans un champ de pesanteur uniforme.

c.f. TP N° 11 de Physique

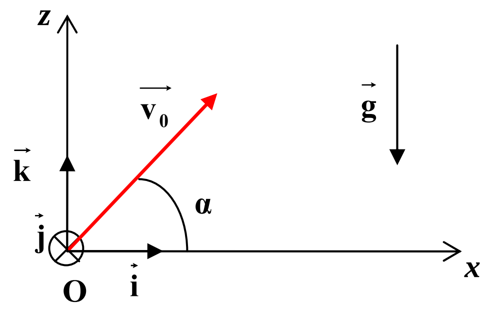
Objectifs :

- *Quelles sont les équations horaires du mouvement ?*
- *Quelle est la trajectoire du centre d'inertie du projectile?*

I. Quelles sont les équations horaires du mouvement ?

I.1. *Bilan des forces extérieures au système*

- On étudie le lancer d'un projectile avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ dans un champ de pesanteur uniforme (lancer au voisinage de la Terre)
- Le système d'étude est un projectile de masse m et de centre d'inertie G (ex : balle de golf, boule de pétanque…)



- Le référentiel d'étude est supposé galiléen pour la durée de l'expérience.
- Bilan des forces extérieures :
  - poids $\vec{P}$ du projectile
  - poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$
  - les forces de frottements de l'air (frottement fluide) : $\vec{f}$ proportionnelle à la vitesse du projectile

  On supposera qu'on peut négliger $\overrightarrow{\Pi_A}$ (la masse volumique de l'air est très faible devant celle du projectile) et $\vec{f}$ (la vitesse initiale du projectile et la distance parcourue suffisamment faibles) devant $\vec{P}$.

  On pourra donc considérer que le mouvement du projectile est un mouvement de chute libre dans un champ de pesanteur uniforme.
- L'axe vertical Oz est **ascendant** !
- A l'instant initial t = 0 s on a **x(0) = y (0) = z (0) = 0**

  Le vecteur vitesse à l'instant initial est $\vec{v_0}$ et **l'angle de tir** est noté α (par rapport à l'axe horizontal O*x*)

I.2. *Coordonnées du vecteur accélération*

D'après la deuxième loi de Newton on sait que $\vec{P} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}$ ($\overrightarrow{a_G(t)}$ est l'accélération du centre d'inertie) soit $m \cdot \vec{g} = m \cdot \overrightarrow{a_G(t)}$ d'où $\vec{g} = \overrightarrow{a_G(t)}$ ainsi le vecteur accélération aura la même direction, le même sens et la même valeur que le vecteur champ de pesanteur !

En projetant cette relation selon les trois axes du repère on obtient les coordonnées du vecteur accélération :

$$\overrightarrow{a_G(t)} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{array} \right.$$

I.3. *Coordonnées du vecteur vitesse*

- Il s'en suit les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie du projectile en intégrant les coordonnées du vecteur accélération on obtient alors :

$\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{v_x} = C_1 \\ \mathbf{v_y} = C_2 \\ \mathbf{v_z} = -g \cdot t + C_3 \end{array} \right.$ d'après le conditions initiales on en déduit $\boxed{\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{v_x} = v_{0x} = \mathbf{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \\ \mathbf{v_y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v_z} = -g \cdot t + v_{0z} = \mathbf{-g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha)} \end{array} \right.}$

On remarque que :

- la composante horizontale du vecteur vitesse est constante et vaut $\mathbf{v_x} = v_{0x} = \mathbf{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$
- la composante verticale du vecteur vitesse est une fonction affine décroissante du temps.

I.4. Equations horaires du mouvement

- Il s'en suit les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{OG}}$ du centre d'inertie du projectile en intégrant les coordonnées du vecteur vitesse on obtient alors les équations horaires du mouvement :

$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x(t)} = v_{0x} \times t + C_4 = (v_0 \cdot \cos(\alpha) \times t) + C_4 \\ \mathbf{y(t)} = C_5 \\ \mathbf{z(t)} = -\frac{1}{2} \cdot g \times t^2 + v_{0z} \times t + C_6 = -\frac{1}{2} \cdot g \times t^2 + (v_0 \cdot \sin(\alpha)) \times t + C_6 \end{array} \right.$$

D'après les conditions initiales on en déduit les équations horaires :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{OG}} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x(t) = v_{0x} \times t = (v_0 \cdot \cos(\alpha)) \times t} \\ \mathbf{y(t) = 0} \\ \mathbf{z(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \times t^2 + v_{0z} \times t = -\frac{1}{2} \cdot g \times t^2 + (v_0 \cdot \sin(\alpha)) \times t} \end{array} \right.}$$

- Les coordonnées du vecteur position (équations horaires du mouvement) nous montrent que le **mouvement du projectile est plan**, la trajectoire est contenue dans le plan *x*O*z*.
- La fonction **x(t)** est une ***fonction linéaire*** de coefficient directeur $\mathbf{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$

  La fonction **z(t)** est une ***parabole***.

II. Quelle est la trajectoire du centre d'inertie du projectile ?

II.1. Equation de la trajectoire

- A l'aide des équations horaires on peut déterminer l'équation de la trajectoire **z = f (x)**.
- D'après l'équation horaire $\mathbf{x(t) = v_{0x} \times t}$ on peut en déduire que $\mathbf{t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}}$

  En remplaçant l'expression précédente de t dans l'équation horaire z(t) on obtient l'équation de la trajectoire du projectile :

$\mathbf{z(t)} = -\frac{1}{2} \cdot g \times t^2 + v_{0z} \times t$ donc $\mathbf{z(x)} = -\frac{1}{2} \cdot g \times \frac{x^2}{[v_0 \cdot \cos(\alpha)]^2} + v_0 \cdot \sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$ en simplifiant on a:

$$\boxed{\mathbf{z(x)} = \mathbf{-\frac{1}{2} \cdot g \times \frac{x^2}{[v_0 \cdot \cos(\alpha)]^2} + x \times \tan(\alpha)}}$$

- ***L'équation de la trajectoire est celle d'une parabole*** (dont la concavité est vers le bas).
- On remarque que **l'équation de la trajectoire dépend des conditions initiales** $\mathbf{v_0}$ et $\boldsymbol{\alpha}$!

II.2. Notions de flèche et de portée

- La **flèche** correspond à la hauteur maximale que peut atteindre le projectile, on la note **F** (c'est le sommet de la parabole z(x)).**Voir Fig 3 p 214**

Lorsque le projectile atteint la flèche alors la ***composante verticale de la vitesse en ce point est nulle*** soit :

$\mathbf{v_z = -g \cdot t_F + v_0 \cdot \sin(\alpha) = 0}$ soit l'instant $\mathbf{t_F}$ où le projectile est à sa hauteur maximale est : $\mathbf{t_F = \dfrac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}}$

et donc la hauteur maximale $\mathbf{z_F}$ (flèche) aura pour expression :

$\mathbf{z(t_F)} = -\dfrac{1}{2} \cdot g \times t_F^{\,2} + (v_0 \cdot \sin(\alpha)) \times t_F = -\dfrac{1}{2} \cdot g \times \dfrac{v_0^{\,2} \cdot \sin^2(\alpha)}{g^2} + \dfrac{v_0^{\,2} \cdot \sin^2(\alpha)}{g}$ ce qui donne après simplification : $\boxed{z(t_F) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{v_0^{\,2} \cdot \sin^2(\alpha)}{g}}$

- La **portée** correspond à la distance maximale que peut atteindre le projectile, on la note **P** (c'est ***le point d'intersection du projectile avec l'axe horizontal Ox qui correspond souvent au sol***) **Voir Fig 3 p 214**

Lorsque le projectile atteint le point P alors $\mathbf{z(x_P)} = \mathbf{0}$ ainsi cela revient à résoudre une équation du second degré :

$$\mathbf{z(x_P)} = -\frac{1}{2} \cdot g \times \frac{x_P^{\,2}}{[v_0 \cdot \cos(\alpha)]^2} + x_P \times \tan(\alpha) = 0 \text{ soit } \mathbf{z(x_P)} = x_P \times \left[-\frac{1}{2} \cdot g \times \frac{x_P}{v_0^{\,2} \cdot \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha) \right] = 0$$

Les deux solutions analytiques sont :

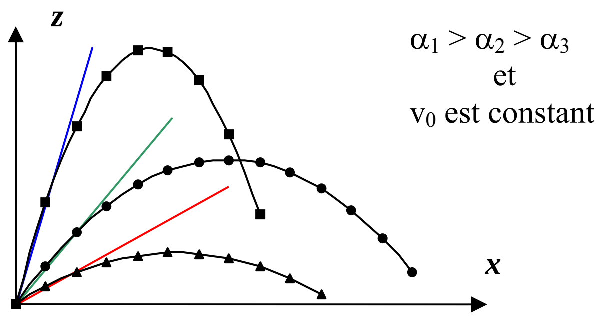
- $\mathbf{x_P = 0}$ mais cela n'a aucun intérêt physique !!!
- $\boxed{\mathbf{x_P = \dfrac{2 \cdot v_0^{\,2} \cdot \cos^2(\alpha) \times \tan(\alpha)}{g}}}$ ce qui donne par simplification $\boxed{\mathbf{x_P = \dfrac{v_0^{\,2} \cdot \sin(2\alpha)}{g}}}$

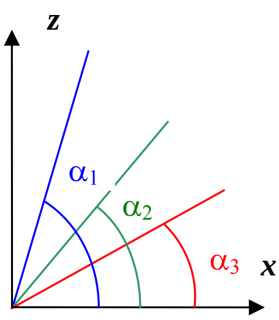
(car $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$)

II.3. Influence des conditions initiales sur la trajectoire

- **Pour une même valeur de vitesse initiale v_0, l'angle de tir α a une importance sur la flèche et la portée.**

La portée sera maximale lorsque l'angle de tir est $\alpha = 45°$ (car $\sin(2\alpha) = 1$ et donc $x_P = \dfrac{v_0^{\,2}}{g}$)





- **Pour une même direction (même angle de tir), plus v_0 est grand, plus la flèche et la portée seront importantes**. **Figure 4 B p 215** (attention dans ce cas on ne pourra plus négliger les frottements de l'air).